

الابداع في الرياضيات

الوحدة الخامسة الإزدواجـــات

٥-١ > الإزدواجات

🖳 تعریف:

الإزدواج هو نظام من القوى يتكون من قوتين متساويتين في المعيار ومتضادتين في الإنجاه ولا يجمعهما خط عمل عمل واحد، ومن أمثلة الإزدواج أدارة عجلة قيادة السيارة ، وإدارة صنبور المياه.

🖳 عزم الإزدواج:

هو مجموع عزمي قوتي الإزدواج حول أي نقطة في الفراغ ومعيار عزم الإزدواج يساوي حاصل ضرب معيار

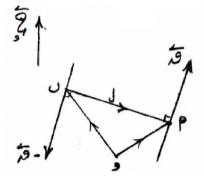
إحدى القوتين في البعد العمودي بين القوتين ويرمز له بالرمز ع = | [ع] |

نا
$$|\overline{\mathcal{S}}|$$
 $=$ $0 imes 0$ حيث $|0 op|$ $|\overline{\mathcal{S}}|$ $| op$

🛄 نظریة.

عزم الإزدواج هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التى ينسب اليها عزم قوتيه ويساوى عزم إحدى قوتي الإزدواج حول نقطة على خط عمل القوة الأخرى فإذا كانت 10 ، - 10 هما القوتين المكونتين للإزدواج

حيث | 0 | = 0 فإن عزم الإزدواج هو:



🕮 مثال:

إذا كان \overline{U}_{r} ، \overline{U}_{r} قوتى إزدواج بحيث $\overline{U}_{r}=-7$ $\overline{W}_{r}+7$ من تؤثر في النقطة f(1، f(1) تؤثر

في النقطة ب(-١-٢) أوجد $\overline{U_{\gamma}}$ ثم أوجد عزم الإزدواج وكذلك طول العمود المرسوم من ٢ على $\overline{U_{\gamma}}$.

<u>ک الحسل:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
 ثر من $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ قوتى الإزدواج $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{3} \therefore \qquad \sqrt[4]{3} - = \sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{7} = \cdots$$

عزم الإزدواج = عزم $\frac{\sqrt{3}}{3}$ حول نقطة $\frac{1}{3}$ أو عزم $\frac{\sqrt{3}}{3}$ حول نقطة $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$(1\cdot Y-)=(1\cdot 1)-(Y\cdot 1-)=\overleftarrow{P}-\overleftarrow{\varphi}=\overleftarrow{\varphi}: \qquad \overleftarrow{\varphi}\times \overleftarrow{\varphi}=\overleftarrow{\mathcal{Z}}:$$

$$\overleftarrow{\mathcal{Z}} = \overleftarrow{\mathcal{Z}} (\Upsilon - \xi) = (\Upsilon - \iota \Upsilon) \times (\iota \iota \Upsilon) = \overleftarrow{\mathcal{Z}} :$$

وحدة طول
$$\frac{1}{|\mathcal{F}|} = \frac{1}{|\mathcal{F}|} = \frac{1}{|\mathcal{F}|} = \frac{1}{|\mathcal{F}|} = \frac{1}{|\mathcal{F}|} = 0$$
. $3 \times v = |\mathcal{F}|$

الإزدواجات الستوية:

هى الإزدواجات التى تؤئر على جسم متماسك بحيث تكون خطوط عمل قوى هذه الإزدواجات تقع فى مستو واحد وفى هذه الإزدواجات تقع فى مستو واحد وفى هذه الإزدواجات وتتحدد إشارة القياس الجبرية لإيجاد عزوم هذه الإزدواجات وتتحدد إشارة القياس الجبرى تبعا للقاعدة التالية:

<u>قاعدة؛</u>

- · القياس الجبرى لعزم الإزدواج يكون موجب إذا كانت قوتيه تعملان على الدوران ضد عقارب الساعة
 - القياس الجبرى لعزم الإزدواج يكون سالب إذا كانت قوتيه تعملان على الدوران مع عقارب الساعة

🛄 إتزان جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين:

تعریف:

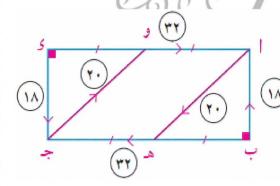
يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير إزدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى نتبحة:

يتزن الجسم تحت تأثير إزدواجين مستويين أو أكثر إذا إنعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الإزدواجات حقيقة:

الإزدواج لا يتزن الا مع إزدواج آخر مساو له في المعيار ومضاد له في الإنجاه

<u>ا مثال:</u>

فى الشكل المقابل: المبحى مستطيل، ه، و منتصفات بين المبحى المبتدى المبحى المبتدى المبتدى المبتدى المبتدى المبتدى المبتدى المؤثرة بالنيوتن ومقاديرها وانتجاهاتها كما بالشكل أثبت أن المجموعة متزنة.



إستاتيكا ثانوية عامة

الابداع في الرياضيات

القوتان $Y \cdot Y \cdot Y$ نيوتن تكونا إزدواجا القياس الجبرى لعزمه $S_1 = -Y \times Y = -Y \times Y$

$$\frac{7\xi}{\circ} = \frac{7}{1} \times A = A \times \frac{7}{1} = \frac{37}{1} \times A = \frac{7}{1} = \frac{37}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{37}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{37}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{37}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{7}{1} = \frac{7}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{7}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{7}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{7}{1} = \frac{7}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{7}{1} = \frac{7}{1} = \frac{7}{1} = \frac{7}{1$$

القوتان • ٢٠٤٢ نيوتن تكونا إزدواجا القياس الجبري لعزمه

$${\mathbb S}_{\gamma}=-\cdot$$
 ۲ د هـ ۲ $=-\cdot$ ۲ که $=-$ ۳ ۹ نیوتن .سم

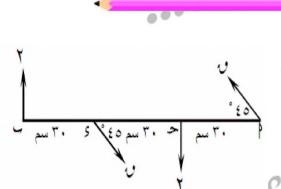
ن کے
$$+$$
 کے $+$ کے $+$



أثر ازدواجان مستويان في قضيب أب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الإزدواج الأول يتكون من قوتين ٤٠٠ ث كجم . والثاني من قوتن ٢ ، ٢ ث كجم وتؤثر عند النقط

وفي الإنجاهات الموضعة بالشكل المجاور

عين قيمة 10 التي تجعل الجسم يتزن تحت تأثير الإزدواجين.



<u>ک الحل:</u>

القوتان ۲، ۲ تکونا إزدواج عزمه عی حیث عی $\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ اث کجم.سم القوتان \mathbf{v} ، \mathbf{v} تکونا إزدواج عزمه عی حیث عی $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ جاه ٤°

یم.سم $\overline{Y}_{Y} = \overline{Y}_{Y} \times 7 \times \overline{Y}_{Y} = \overline{Y}_{Y}$ ت کجم.سم $\overline{Y}_{Y} = \overline{Y}_{Y} \times 7 \times \overline{Y}_{Y} = \overline{Y}_{Y} \times \overline{Y}_{Y}$

. * الجسم متزن تحت تأثير الإزدواجين

$$\bullet = \upsilon \overrightarrow{\mathsf{Y}} / \mathtt{Y} \cdot + \mathsf{Y} \cdot + \mathsf{Y} \cdot - \ldots \qquad \bullet = {}_{\mathsf{Y}} \mathcal{E} + {}_{\mathsf{Y}} \mathcal{E} : \mathsf{C} = \mathsf{C}$$

 $\mathbf{\hat{\Sigma}} \ \mathbf{\hat{T}} \mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}} = \frac{\mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}}}{\mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}}} = \boldsymbol{\upsilon} \therefore \quad \mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}} \mathbf{\hat{Y}} \cdot \mathbf{\hat{Y}}$

🕮 مثان:

المبحوه و سداسى منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوى ٧، ٤، ٧، ٤ ث جم فى $\overline{\P}$ ، $\overline{\P}$

ک الحل:

القوتان ٧ ، ٧ ث.جم تكونا إزدواج عزمه كي حيث

$$\mathbf{S}_{i} = \mathbf{V} \times \mathbf{I}_{i}$$
 ثجم.سم $\mathbf{S}_{i} = \mathbf{V} \times \mathbf{I}_{i}$ ثجم.سم

القوتان ٤٤٤ ث.جم تكونا إزدواج عزمه عي حيث

القوتان ٤٠ ث.جم تكونا إزدواج عزمه عي حيث

$$\mathcal{F}_{\mu} = -\mathcal{O} \times \mathcal{F}_{\pi} = -\mathcal{O} \times \mathcal{O} = \overline{\mathcal{F}}_{\pi} + \mathcal{O} = \overline{\mathcal{F}}_{\pi} + \mathcal{O} = \overline{\mathcal{F}}_{\pi}$$
ن ثجم.سم

· : الجموعة متوازنة ... ٤٠ + ٤٠ + ٤٠ = ٠

∴ ۰ × ۳/۲ - ۱ ۱ √۳ ن = ۰ = ۲ نجم ۲ - ۱ نجم د بان = ۱ نجم ۳ - ۱ نجم

<u>تذكر أن:</u>

في السداسي المنتظم إذا كان طول ضلعه = ل فإن:

- القطر الغير رئيسى يصل بين رأسين غير متتالين ويكون عمودياً على كل من
 الضلعين المتوازيين الواصل بينهما ، والقطر الرئيسى يصل بين رأسين متقابلين.
 - ٢) جميع الأضلاع متساوية = ل وجميع الزوايا متساوية وقياس كل منها ١٢٠°
 - $\overline{\Psi}$ طول القطر الغير رئيسي $U = U \sqrt{\Psi}$
 - ٤) طول القطر الرئيسي = ٢ل

<u>ا مثال:</u>

جه قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ث كجم يؤثر فى منتصفه ويتحرك فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه ٩ ، أثر على القضيب إزدواج فى مستوى رأسى ، القياس الجبرى لعزمه ١٥٠ ث كجم.سم . برهن على أن رد فعل المفصل عند ٩ يساوى وزن القضيب وأوجد ميل القضيب على الأفقى فى وضع التوازن.

<u>ک الحسل:</u>

نفرض أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية فياسها هـ القضيب متزن تحت تأثير:

- وزن القضيب ١٠ ث كجم رأسياً لأسفل
- رد فعل المفصل (ح) وهو مجهول الإنجاه
- الإزدواج المؤثر وعزمه عي = ١٥١ ث كجم.سم
 - .. الإزدواج لايتزن إلا مع إزدواج آخر
- . . وزن القضيب ورد فعل المفصل يجب أن يكونا إزدواج أخر عزمه عم
 - .. رد الفعل المفصل = وزن القضيب ويكون رأسيا لأعلى
 - .: ٧ = ١ ، ث كجم رأسيا لأعلى
- \times القضيب متزن $3_{\gamma}+3_{\gamma}=$ حيث $3_{\gamma}=-$ ۱ \times که \times

$$\sim 10 = VC$$
: $\leftarrow 10 = VC$

$$\circ \Im \circ \pm = \frac{1}{7} - \exists \Rightarrow = (a >) \circ \therefore \iff \frac{1}{7} = \frac{10}{7} = \frac{10}{7} = \pm \circ \Gamma \circ \therefore$$

أى أنه يوجد وضعين للتوازن ويميل فيهما القضيب على الأفقى بزاوية ٦٠° إما لأعلى أو لأسفل

🕮 مثان:

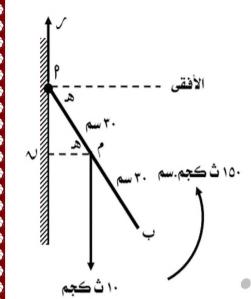
المن قضيب منتظم وزنه ١٨ نيوتن وطوله ٦٠ سم ويمكنه الدوران بسهوله في مستوى رأسي حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير في القضيب عند نقطة جم التي تبعد ١٥ سم من أفإذا إستند القضيب بطرفه على نضد أفقى أملس فأوجد مقدار وأتجاه رد فعل المسمار، وإذا شد الطرف أفقيا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويا لوزن القضيب فأوجد الشد في الحبل ورد فعل المسمار حينئذ علما بأن القضيب يتزن في الحالتين في مستوى رأسي يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٢٠°.

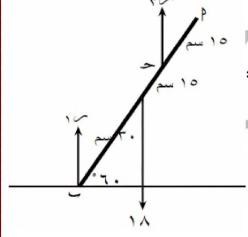
<u>ک الحسل:</u>

الحالة الأولى:

القضيب متزن تحت تاثير ثلاث قوى وقوتان منهم إتجاههما معلوم وهما: الوزن ١٨ نيوتن رأسيا لأسفل ورد فعل النضد الأملس رأسيا لأعلى

- " هاتان القوتان متوازيتان
- .. رد فعل السمار يجب أن يوازيهما
- .. رد فعل المسمار يكون رأسيا لأعلى
 - بتطبيق شروط الإتزان
 - $(1) \quad 1 \ \ \lambda = {}_{1} \mathcal{N} + {}_{1} \mathcal{N} :$





نیوتن وبالتعویض فی (۱) نیوتن ا ۲ خوتن
$$\Upsilon = \frac{\Upsilon \cdot \times 1 \Lambda}{\xi \circ} = \Upsilon \cdot \times 1$$
نیوتن نیوتن درا

الحالة الثانية:

*. ون النضد = وزن القضيب = ١٨ نيوتن . . القوتان ١٨ ، ١٨ تكونا إزدواج عزمه عن حيث

٠٠٠ القضيب متزن ، ٠٠٠ الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج مثله

قوة الشد (٥) ورد فعل المسمار (٨) يجب أن يكونا إزدواج

.. ح = 0 ويضادها في الإنجاه

أى أن رد فعل المسمار يكون أفقيا وفي عكس إنجاه الشد

ويكون عزم الإزدواج هو عم حيث

ع
$$= \mathbf{v} \times \mathbf{o}$$
 (جاء $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}}$ نیوتن.سم

نیوتن
$$\overline{\Psi} \setminus Y = \mathcal{L} = \mathcal{L} : \mathcal{L} = \frac{Y \times YY}{\overline{\Psi} \setminus Y \circ} = \mathcal{U}$$
 نیوتن $\mathcal{L} : \mathcal{L} = \mathcal{L} = \mathcal{L} = \mathcal{L} = \mathcal{L}$

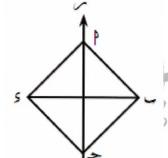
🕮 مثال:

الحان:

اولا: قبل التأثير على الصفيحة بالإزدواج:

الصفيحة متزنة تحت تأثير قوتين:

- وزن الصفيحة ٣٠٠ ث جم رأسياً لأسفل
 - رد فعل المسمار (حر)
 - .: ٧ = ٠ ٠ ث جم رأسيا لأعلى



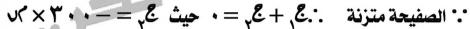
ثانيا: بعد التأثير على الصفيحة بالإزدواج:

نفرض أن القطر جح يميل على الرأسى بزاوية قياسها هـ الصفيحة متزنة تحت تأثير:

- وزن الصفيحة ٣٠٠ ث جم رأسياً لأسفل
 - رد فعل السمار (٧)
- الإزدواج المؤثر وعزمه عي = ١٠٥٠ ث جم.سم
 - ". الإزدواج لايتزن إلا مع إزدواج آخر

.. کمر = ۲۰ = ۲۰ سم ..

- .. الوزن (٣٠٠) ورد الفعل (ر) يجب أن يكونا إزدواج أخر عزمه عم
 - .. ٧ ٠٠٠ ثجم رأسيا لأعلى .. رد فعل السمار لم يتغير



$$\forall \circ \cdot \cdot = \nu \land \forall \cdot \cdot \cdot \therefore \quad \Leftarrow \quad \cdot = \nu \land \times \forall \cdot \cdot \cdot - \forall \circ \cdot \cdot \cdot \therefore$$



$$\therefore \mathbf{7}_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \sqrt{\mathbf{7}} \text{ where } \mathbf{7} = \mathbf{7} \cdot \mathbf{7} = \mathbf{7} \times \mathbf{7} = \mathbf{7} \times \mathbf{7} = \mathbf{7} \times \mathbf{7} \times \mathbf{7} = \mathbf{7} \times \mathbf{7} \times \mathbf{7} \times \mathbf{7} = \mathbf{7} \times \mathbf{$$

$$2 \circ 2 \circ \frac{1}{|Y|} = \frac{1}{|Y|$$

ن. \overline{R} يكون فى وضع رأسى .: \overline{R} يكون فى وضع رأسى .:

🕮 مثال:

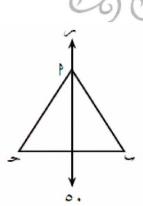
المبح صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ووزنها ٥٠ ث جم ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث ، علقت الصفيحة في مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس البحيث كان مستواها رأسياً أوجد الضغط على المسمار ، وإذا أثر على الصفيحة إزدواج معيار عزمه يساوى ٢٥٠ ث جم.سم وإتجاهه عمودى على مستويها فإتزنت ، أوجد ميل الضلع السلم الشلق إذا علم أن إرتفاع المثلث يساوى ١٥ سم.

ک الحسل:

اولا: قبل تأثير الإزدواج على الصفيحة:

الصفيحة متزنة تحت تأثير قوتين:

- وزن الصفيحة ٥٠ ث جم رأسياً لأسفل
 - رد فعل المسمار (٠)
 - .. ح = ، ه ثجم رأسيا لأعلى ..



ثانيا: بعد التأثير على الصفيحة بالإزدواج:

نفرض أن الضلع السلط الأفقى بزاوية قياسها هـ الصفيحة متزنة تحت تأثر:

- وزن الصفيحة ٥٠ ث جم رأسياً لأسفل
 - رد فعل المسمار (۱۰)
- الإزدواج المؤثر وعزمه ع. = ٥ ٢ ث جم.سم
 - . الإزدواج لايتزن إلا مع إزدواج آخر
- .. الوزن (٥٠) ورد الفعل (٠/) يجب أن يكونا إزدواج أخر عزمه عم
 - ن. $\sim \circ \circ + \circ \circ$ رأسيا لأعلى ... رد فعل السمار لم يتغير ...
- \times الصفيحة متزنة 3 + 3 + 3 = 0 حيث 3 = 0

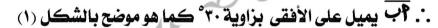
$$a_{m} \circ = \frac{70}{0} = \text{NC} : \leftarrow 70 = \text{NC} : : \leftarrow \cdot = \text{NC} \times 0 \cdot - 70 \cdot :$$

·· الله ، نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة : ٢ من جهة القاعدة

$$1 \cdot = 1 \circ \times \frac{7}{7} = 6$$
 .. $\Leftrightarrow n = \frac{7}{7} = 6$...

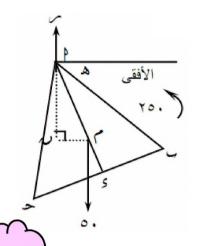
$$\frac{1}{Y} = \frac{0}{1} = (\sqrt{N} >)$$
 \therefore

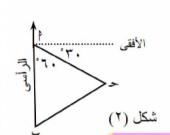
ن
$$\mathcal{O}(< \mathcal{O}(< \mathcal{O}) = +1$$
 جا $\mathcal{O}(< \mathcal{O}(< \mathcal{O}) = +1$ ای آن $\mathcal{O}(< \mathcal{O}(< \mathcal{O}) = +1$ نکون رأسياً



وإذا كانت رؤوس المثلث في إنجاه ضد عقارب الساعة فإن 👇 يكون رأسياً

.. البير على الأفقى بزاوية ٩٠° كما هو موضح بالشكل (٢)





شكل (١)

دائما

🛄 تكافؤ إزدواجين:

<u>تعریف:</u>

يقال لإزدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما أي أنه

إذا كان عجم مما عزمى الإزدواجين فإن شرط تكافؤ هذين الإزدواجين هو:

ملاحظة.

الإزدواج لايتكافئ الا مع إزدواج آخر مساو له في معيار العزم وله نفس إنجاه الدوران

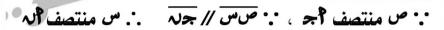
🛄 مثال:

 $٩ بج ح مستطیل فیه <math>٩ ب = ٠ ٤ سم ، بج = ٠ سم. أثرت قوتان مقدار کل منهما ۲۰۰ نیوتن فی <math>\overline{۹ ب > 5}$ وقوتان $\overline{4 + 5}$ عند 8 > 6 وتوازیان $\overline{9 + 5}$ عین قیمهٔ 4 > 6 وتوازیان $\overline{9 + 5}$ عین قیمهٔ 4 > 6 وتوازیان $\overline{9 + 5}$ عند 8 > 6 عند 8 > 6 وتوازیان 8 > 7 عند 8 > 7 عن

ك الحل:

القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه كي حيث

القوتان $v \cdot v$ تكونا إزدواج عزمه $v \cdot v \times v$ نيوتن.سم حساب طول $v \cdot v \cdot v$



$$\mathbb{P} = \mathbb{P} : \mathbb{P} = \mathbb{P} : \mathbb{P} = \mathbb{P}$$

= من المثلث الب $\sim \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = rac{4 + \times 1 \times 1}{2}$ من المثلث المبر

$$u^{8} \times u = 3$$
 حيث $u^{8} + u = 3$ حيث $u^{8} \times u = 3$

نیوتن
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{E} \mathbf{A}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{E} \mathbf{A}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$$
نیوتن

تذكر أن:

- فى المثلث القائم يكون طول العمود الساقط من رأس القائمة على الوتر يساوى حاصل ضرب طولا ضلعى القائمة مقسوما على طول الوتر
 - طول الضلع المقابل لزاوية = طول الوتر × جيب (جا) الزاوية
 - طول الضلع المجاور لزاوية = طول الوتر × جيب تمام (جتا) الزاوية

🛄 مثال:

 \P بجد شبه منحرف فیه $\frac{\P}{\P}$ $\frac{\P}{\P}$, $\frac{\P}{\P}$, $\frac{\P}{\P}$ هم ، $\frac{\Pi}{\P}$ هم ، $\frac{\Pi}{\P}$ اهم ، $\frac{\Pi}{\P}$ اشم ، حد $\frac{\Pi}{\P}$ اشم ، حد $\frac{\Pi}{\P}$ اشم ، حد $\frac{\Pi}{\P}$ افرت قوة مقدارها ۱۲ نیوتن فی $\frac{\Pi}{\P}$ ، اوجد قوتین احدهما تؤثر فی $\frac{\Pi}{\P}$ والأخرى تؤثر فی نقطة ج تكافئان القوی السابقة.

القوتان ٦ ١٦٤١ نيوتن تكونا إزدواج عزمه كي حيث

ع. = ٦ × ١٣ نيوتن.سم

$$u - Y = Y(\psi - Y(\psi -$$

$$\Lambda'(J-Y) = (c_{\pi})^{Y} = (c_{\pi})^{Y} - (c_{\pi})^{Y} = Y + (c_{\pi})^{Y} = C + (c_{\pi})$$

$$^\intercal(ar{\mathsf{U}}-\mathsf{Y}\,\mathsf{I})-\mathsf{Y}\,\mathsf{A}\,\mathsf{9}=^\intercal\mathsf{J}-\mathsf{I}\,\cdot\,\mathsf{\cdot}\,\mathsf{\cdot}\,\mathsf{\cdot}$$
 . $^\mathsf{P}$:.

$$\therefore \cdot \cdot \cdot (- \cup^{7} = P \land 7 - I 3 3 + 7 3 \cup - \cup^{7} \implies (-1)^{7} \Rightarrow (-1)^{7} = -7 \circ (-1)^{7} \Rightarrow (-1)^{7}$$

$$7 = \frac{7 \circ 7}{73} = 3 : C = \frac{7 \circ 7}{73} = 7$$

$$\lambda = \lambda = \lambda$$
 .. $\leftarrow 1 = 1 = 1 - 1 - 1 = 1 = 1$ سم $\lambda = \lambda$

.. الإزدواج لايتكافئ إلا مع إزدواج مثله

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = \frac{1}{2}$$
 جیث $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ جاھ $\times 0$ ، جاھ $\frac{\xi}{\alpha} = \frac{1}{3}$ الإزدواجان متكافئان $\frac{\xi}{\Lambda} = \frac{1}{3}$ حيث $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

نیوتن
$$\circ = \frac{\circ}{1 \ \text{YA}} \times 1 \ \text{YA} = \upsilon$$
 : $\leftarrow 1 \ \text{YA} = \upsilon \times \frac{\xi}{\circ} \times \text{YY}$:



إستاتيكا ثانوية عامة

الابداع في الرياضيات

- ٢ 🕇 الإزدواج المحصل

🛄 نظام القوى المستوية الذي يكافئ إزدواجا:

مجموعة القوى المستوية $\frac{2}{2}$ ، $\frac{2}{2$

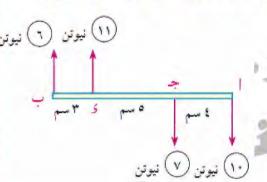
- ١- محصلة القوى تساوى صفر (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى في أي إنجاه = صفر)
 - ٢- مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا يساوى صفر

🕮 مثال:

في الشكل القابل:

أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجا

وأوجد القياس الجبرى لعزمه



كالحل:

بفرض أن تحم وحدة متجهات راسيا لأعلى

· = 51 · - 5 V - 5 7 + 5 11 = 2 :

. . المحصلة تساوى صفر . . . مجموعة القوى إما أن تكون متزنة أو تكافئ إزدواج

لذلك نوجد مجموع عزوم القوى حول أى نقطة ولتكن ٢

187-=17×7-9×11-8×V=, E.:

.. المجموعة تكافئ إزدواجا ، القياس الجبرى لعزمه يساوى - ٢ ٤ ١ نيوتن . سم

🛄 قاعدة:

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية في نقطة في جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاما أضلاع مثلث مأخوذة في إنجاه دورى واحد . كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة الثلث في مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

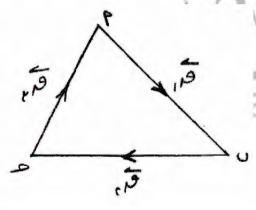
أي أنه:

إذا كانت لركم ، لم و ثلاث قوى مستوية

وكان يمثلها تمثيلاً تاما أضلاع المثلث أبح

فإن هذه القوى تكافئ إزدواج ويكون:

معيار عزم الإزدواج يساوى ضعف مساحة المثلث البح×



وبصفة عامة:

إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاما أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى إتجاه دورى واحد . كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

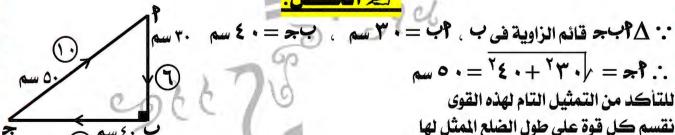
ملاحظات هامة جداً جداً:

- القوى تكون في ترتيب دورى واحد إذا كانت نهاية المتجه الأول هي بداية الثاني ونهاية الثاني هي بداية الثالثثم تكون نهاية الأخير هي بداية الأول
 - ٢) لإيجاد مقدار القوة الممثل لوحدة الأطول (٢) نقسم مقدار القوة على طول الضلع
 - ٣) القوى تكون ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع مضلع إذا كان:
 - ۱۔ القوی فی ترتیب دوری واحد
 - ٢ كل قوة ÷ طول الضلع الممثل لها = مقدار ثابت ويكون هو (١)
 - ع) مساحة المثلث = $\frac{1}{7}$ طول القاعدة \times الإرتفاع

أو مساحة الثلث = $\frac{1}{7}$ حاصل ضرب طولا أى ضلعين \times جيب الزاوية المحصورة بينهما

🛄 مثال:

ك الحسل:



 $\frac{1}{0} = \frac{1}{0} \cdot \frac{1}{0} = \frac{1}{0} \cdot \frac{1}$

- ... مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال يساوى 💍 وحيث أن القوى في ترتيب دوري واحد
 - .. القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة المثلث أبح × ٢

$$\frac{1}{6}$$
 = ۲ ، ۲ سم ۲ ، $\frac{1}{7}$ = $\frac{1}{7}$ × $\frac{1}{7}$ = $\frac{1}{7}$ × $\frac{1}{7}$ = $\frac{1}{6}$ شم $\frac{1}{6}$ شم $\frac{1}{6}$

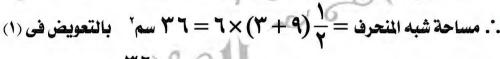
نيوتن.سم
$$\frac{1}{6}$$
 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

🕮 مثال:

 $\frac{\sqrt{4^{-2}}}{\sqrt{4^{-2}}}$ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ إزدواجا معيار عزمه ٣٦٠ نيوتن .سم في الإنجاه $\frac{\sqrt{4^{-2}}}{\sqrt{4^{-2}}}$ فأوجد مقداركل من $\frac{\sqrt{4^{-2}}}{\sqrt{4^{-2}}}$ ، $\frac{\sqrt{4^{-2}}}{\sqrt{4^{-2}}}$.

ك العسل:

- · · القوى تؤثر في إتجاه دوري واحد وممثلة تمثيلا تاما بأضلاع شبه المنحرف
 - ... معيار عزم الإزدواج = ضعف مساحة شبه المنحرف × ٢
 - .. ضعف مساحة شبه المنحرف × ٢ = ٠ ٣٦ (١)
- · مساحة شبه المنحرف = نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين × الإرتفاع



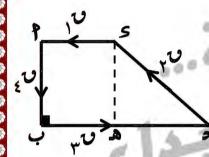
$$r = \frac{v}{4\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{2\nu} = \frac{v}{2\nu} : \frac{v}{$$

$$\circ = \frac{50}{7} = \frac{70}{9} = \frac{70}{7/7} = \frac{70}{7} :$$

نیوتن ، $v_1 = 0$ نیوتن ، $v_2 = 0$ نیوتن ، $v_3 = 0$ نیوتن ، $v_4 = 0$ نیوتن . $v_5 = 0$ نیوتن .

🛄 قاعدة:

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لـثلاث نقط فى مستواها وليست على استقامة واحدة يساوى مقدارا ثابتا لايساوى صفر ، كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواجا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.



حساب طول جح

, 7 = AS

بھ = ٣

Y/7=5>...

🕮 مثال:

المبح مربع طول ضلعه ۱۰ سم، ه و جب ، و و جح بحيث كان جه = جو و حسم ، أثرت قوى

مقاديرها ، ٤٠، ١،، ٢،٣، ٢،٣ ث. كجم في البريب بريح ، حكى ، الله على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجا وأوجد عزمه.

ک الحل:

حساب طول جن

جھ = ج و Δ .. Δ وجھ قائم الزاویة ومتساوی الساقین:

سم
$$\overline{Y}$$
۱ $\circ = \frac{\overline{Y}}{Y} \times Y \cdot = 0$...

نحسب مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ولتكن ج ع ه ع و

*... ع = ۲/۲ مر × ٤٠٠ مر × ۲ مر عدد مر × عدد

$$-=1 \cdot \times \forall \cdot -1 \cdot \times \xi \cdot - \forall \cdot 1 \circ \times \forall \cdot 1 \cdot = \xi \cdot \cdot \cdot$$

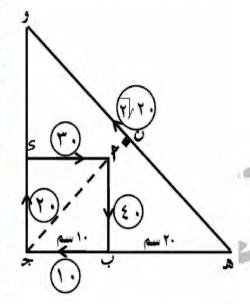
$$3_{\kappa}=3_{\kappa}=3_{\epsilon}=-\cdots$$
 اث ڪجم.سم $3_{\kappa}=3_{\kappa}=3_{\epsilon}=3_{\epsilon}=3_{\epsilon}=3_{\epsilon}$

.. المجموعة تكافئ إزدواجا ، القياس الجبرى لعزمه يساوى — • • ١ ث كجم . سم

🛄 الإزدواج المحصل:

يعرف مجموع إزدواجين مستويين على أنه الإزدواج الذى يساوى عزمه مجموع عزمى هذين الإزدواجين ويسمى مجموع إزدواجين مستويين بالإزدواج المحصل

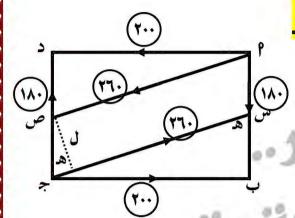
القياس الجبرى لعزم مجموع ازدواجين مستويين يساوى مجموع القياسين الجبريين لعزميهما



المثال:

أب S مستطيل فيه P بن اثرت قوى P سم ، س ، س ، س منتصفا P اثرت قوى مقادیرها ۱۸۰ ، ۲۰۰ ، ۲۰۰ ، ۲۰۰ ، ۲۰۰ ث جم فی آب ، جب ، جک ، آک ، آص ، جس علی الترتیب أوجد عزم الإزدواج الحصل.

القوتان ٢٠٠ ، ٢٠٠ ث جم تكونا إزدواج عزمه كم. حيث ع, = ۰ ۰ ۲ × ۰ ۱ = ۰ ۰ ۰ ۲ ث جم.سم القوتان ١٨٠ ، ١٨٠ ث جم تكونا إزدواج عزمه عم حيث القوتان ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث جم تكونا إزدواج عزمه عم حيث ع.. = ۲۲×ل ث جم.سم



.. جس = ۲۱۲ + ۲۰ = ۲۳ سم

..... ۲۲۰ مربر ۱۲۰۰ مربر المام ا

ويكون عزم الإزدواج الحصل ع حيث

3=3,+3,+3,,=・・・۲-・۲17

ج = ۱ ۲ سم ، س، ص منتصفا بح ، 5 اثرت قوی البحد مستطيل فيه الب = ١٠ سم، مقادیرها ۰ ۰ ۲ ، ۰ ۲ ، ۰ ۲ ، ۰ ۲ ، ۲ ، ۲ ، ۷ نیوتن فی اب ، جری ، جرب ، او کی سامی صبح علی الترتيب فإذا كان القياس الجبرى لعزم الإزدواج المحصل يساوى • • ٤ كنيوتن.سم ، أوجد قيمة ٠ .

القوتان • • ٢ • • ٢ نيوتن تكونا إزدواج عزمه عي ع, = - ۰ ۲ × ۰ ۲ ۱ = - ۰ ۲ ۲ نیوتن.سم

القوتان ٠٠٤٠٠ كا نيوتن تكونا إزدواج عزمه عم حيث

القوتان ٤٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه عي حيث

$${\cal S}_{\mu}={\cal U} imes {\cal O}$$
 نیوتن.سم

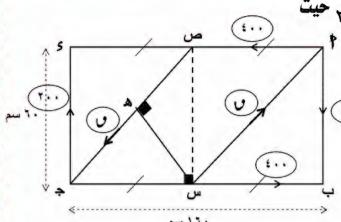
حساب طول سه

· · س ، ص منتصفا بج ، ۶۶

سم
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A}$$
 سم $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A}$

$$1 \cdot \cdot = \overline{}^{7} \wedge \cdot + \overline{}^{7} \wedge \cdot = 0$$
 سم $= 0$...

. عزم الإزدواج المحصل يساوى ٠٠٠ ٢ نيوتن.سم



 $78..3_{\prime} + 3_{\prime} + 3_{\prime\prime} = \cdot \cdot 37$

$$7 \cdot \cdot \cdot = 0 \cdot \wedge + \wedge \cdot \cdot - \therefore$$

نیوتن
$$v \cdot \cdot = \frac{1 \cdot \xi \cdot \cdot}{\xi \Lambda} = v$$
 نیوتن $\cdot \cdot$

🛄 مثال:

تؤثر القوى $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ک الحل:

. . مجموعة القوى إما أن تكون متزنة أو تكافئ إزدواج

لذلك نوجد مجموع عزوم القوى حول أى نقطة ولتكن ٢ فيكون عزم ٧٠ حول ٢ يساوى صفر

$$(\cdot, \xi-) = (\Upsilon, \Upsilon) - (\Upsilon, \Upsilon-) = \Upsilon - \varphi = \overline{\varphi}$$

$$(1\cdot7-)\times(9-\cdot7)+(7-\cdot7)\times(\cdot\cdot\xi-)=\frac{1}{\sqrt{2}}:$$

$$= (Y - Y) + (Y$$

. . مجموعة القوى تكافئ إزدواج معيار عزمه = ٤٠ وحدة عزم

🕮 مثال:

ک الح<u>ل:</u>

حساب الأبعاد العمودية:

$$^{\circ}$$
Y $\cdot = (?^{\circ}S) \cup \therefore \Leftarrow ^{\circ} ? \cdot = (?) \cup \because$

ن
$$U(< f >) = \Gamma^\circ \Rightarrow \Delta \Delta :$$
 ثلاثینی ستینی $\Delta : \mathcal{L}$ ثلاثینی ستینی $\Delta : \mathcal{L}$

$$\times : S > \frac{1}{y} = S \times \frac{1}{y} = S \times 1$$
 سم $\times : S \times 1$

$$\mathbb{T}$$
 عد $= 2$ جا، $\mathbb{T}^{\circ} = \mathbb{Y} \times \mathbb{T} = \mathbb{T}^{\circ}$

$$\overline{q}$$
 ه ، و منتصفات \overline{q} ، \overline{q}

القوتان ١٠ ، ١٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه عم حيث

القوتان ٥، ٥ نيوتن تكونا إزدواج عزمه عج, حيث

$$\overline{Z}_{\gamma} = -\circ \times 2$$
ه $= -\circ \times 1$ $\sqrt{T} = - \cdot 7$ نیوتن.سم

القوتان ٧ ، ٠ نيوتن تكونا إزدواج عزمه عم حيث "

$$3_{\gamma} = \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} = \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} = \mathcal{O} \times \mathcal{O}$$

<u>تذكر أن:</u>

- ١) في المعين القطران غير متساويين ، ومتعامدين ، وينصف كل منهما الآخر ،
 وينصف كل منهما زاويتي الرأسين الواصل بينهما .
 - ٢) في المثلث الثلاثيي الستيني يكون:
 - طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ $=\frac{1}{7}$ طول الوتر
 - $\overline{\psi} imes \sqrt{\overline{\psi}}$ طول الضلع المقابل للزاوية ٦٠° $\frac{1}{\gamma}$ طول الوتر

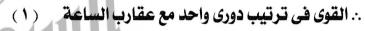
<u> مثال:</u>

أب مثلث متساوی الساقین فیه $\P = \P = \P$ سم ، S منتصف $\overline{+}$ ، $\P = \P$ اسم ، اثرت

ك الحل:

$$a = \frac{7}{1} + \frac{7}{1} = 0$$
 سم $a = \frac{7}{1} + \frac{7}{1} = 0$ سم $a = \frac{7}{1} + \frac{7}{1} = 0$ سم $a = \frac{7}{1} + \frac{7}{1} = 0$ سم

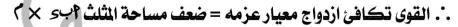
في ۱۹۵۸ عمل في ۱۹۰۶ یعمل في ۱۹۰۶ نعمل في ۱۹۰۶ نعمل في ۱۹۰۹ نورو ۱۹۰۹ کا تعمل في ۱۹۰۹ نوروو



بقسمة كل قوة على طول الضلع المثل لها

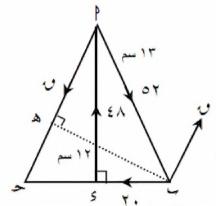
$$\xi = \frac{\xi \lambda}{1 \gamma} = \frac{\xi \lambda}{P_S} \quad \xi = \frac{V}{0} = \frac{V}{S}, \quad \xi = \frac{0 V}{1 \gamma} = \frac{0 V}{1 \gamma} :$$

... القوى الثلاثة ممثلة تمثيلا تاما بأضلاع المثلث حيث ٢ = ٤ (٢). من (١) ، (٢)



نفرض أن القوتان اللتان تؤثران في المحمِّ وعند ب في إنجاه جمُّ هما ٢٠٠٥ نفرض أن القوتان اللتان تؤثران في

ن. القوتان $oldsymbol{v}$ ، نيوتن تكونا إزدواج عزمه $oldsymbol{S}_{oldsymbol{v}}$ حيث $oldsymbol{S}_{oldsymbol{v}}=oldsymbol{v} imesoldsymbol{v}$ به نيوتن.سم



<u>حساب طول بھے :</u>

ن مساحة
$$\triangle$$
اب $=$ $=$ $\frac{1}{7}$ ب $=$ \times المح \times به \times

$$\frac{s^{\gamma} \times s^{\gamma}}{s^{\gamma}} = \frac{s^{\gamma} \times s^{\gamma}}{s^{\gamma}} = \frac{s^{\gamma} \times s^{\gamma}}{s^{\gamma}} = \frac{s^{\gamma} \times s^{\gamma}}{s^{\gamma}} = \frac{s^{\gamma} \times s^{\gamma}}{s^{\gamma}}$$

ن بھ
$$=\frac{17\cdot 1}{17}=\frac{17\cdot 1}{17}=\frac{17\cdot 1}{17}=\frac{17\cdot 1}{17}=\frac{17\cdot 1}{17}=\frac{17\cdot 1}{17}$$
نیوتن.سم

$$\bullet = \upsilon \frac{1}{1} \frac{7}{1} + 7$$
 $\bullet = \iota \frac{1}{1} \frac{7}{1} + \frac{7}{1} \frac{7}{1} = \iota \frac{1}{1} = \iota \frac{1}{1} \frac{7}{1} = \iota \frac{1}{1} = \iota \frac{1}{1$

$$au$$
نیوتن au ۲۱ au ۲۲ au ۲۲ نیوتن au

🕮 مثال:

 $٩ - 8 = 8 = 1 \, ag{-4.8}$ اسم، $9 = 1 \, ag{-4.8}$ اسم، $9 = 1 \, ag{-4.8}$ اسم، $9 = 1 \, ag{-4.8}$ اثرت قوی مقادیرها $1 = 1 \, ag{-4.8}$ اثیوتن فی $1 \, ag{-4.8}$ علی الترتیب .اثبت أن هذه القوی تکافئ إزدواج وأوجد معیار عزمه، ثم أوجد قوتین تؤثران عند $1 \, ag{-4.8}$ وتوازیان $1 \, ag{-4.8}$ علی الترتیب بحیث تصبح المجموعة فی حالة توازن.

ک الحل:

حساب الأطوال:

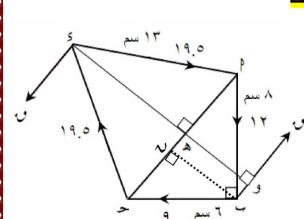
نرسم \overline{R} ثم نرسم \overline{R} \perp \overline{R} في قطع \overline{R} في ه \overline{R} وخط عمل القوة R المؤثرة عند R في و

نجS=S=S=1 سم $\therefore \triangle S$ ج متساوی الساقین:

ج منتصف $\overline{R} \perp \overline{R} \perp \overline{R}$.. ه منتصف \overline{R}



<u>في الشكل البحد .</u>



. . القوى في ترتيب دوري واحد مع عقارب الساعة

$$\frac{r}{r} = \frac{190}{17} = \frac{190}{17}, \quad \frac{r}{r} = \frac{190}{17} = \frac{190}{17}, \quad \frac{r}{r} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{17}{17} = \frac{17}{17$$

(۲)
$$\frac{\gamma}{\gamma} = \gamma$$
 القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع المثلث حيث $\gamma = \frac{\gamma}{\gamma}$

.. القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة الشكل البحع×٢

.. عزم الإزدواج = - × (مساحة المثلث البح + مساحة المثلث المح)× >

$$' \cdot 3_{1} = -7 \times (\frac{1}{7} \times 4 \times 4 + \frac{1}{7} \times 4 \times 4 \times 4) \times 7$$

نفرض أن القوتان اللتان $\mathfrak{P} \circ \mathfrak{T}$ تؤثران عند وتوازیان $\overline{\mathfrak{P}} \circ \overline{\mathfrak{P}} \circ \overline{\mathfrak{P}}$ هما $\mathfrak{P} \circ \mathfrak{P}$ نیوتن.سم ... القوتان هما $\mathfrak{P} \circ \mathfrak{P}$ نیوتن تکونا إزدواج عزمه $\mathfrak{P}_{\mathsf{P}} \circ \mathfrak{P}$ هما $\mathfrak{P} \circ \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ نیوتن.سم

$$\cdot = \upsilon$$
۱ ٦,۸ + ۲ \circ ۲

$$*$$
 نیوتن ۱۵، ۱۵ نیوتن \cdot القوتان هما ۱۵، ۱۵ نیوتن \cdot : \cdot القوتان هما ۱۵، ۱۵ نیوتن \cdot